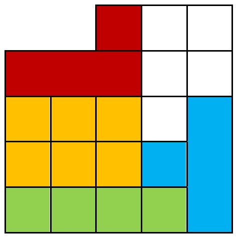
Образовательный центр «Сириус»
Южная математическая смена
Основной тур. 8.11.2015
10 класс

1. Разрежьте фигуру, изображенную слева, на пять различных частей с одинаковым периметром (все разрезы должны проходить по линиям сетки).



Решение.
См. рис.

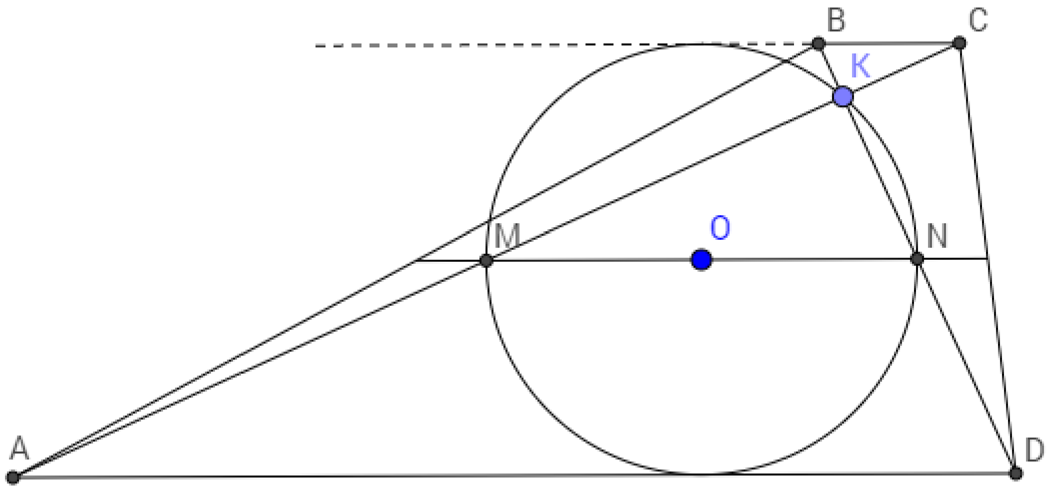
2. В чемпионате по шахматам участвовало 20 гроссмейстеров (каждый сыграл с каждым ровно по одной партии). Могло ли в результате оказаться так, что каждый из участников выиграл столько же партий, сколько сыграл вничью?
Ответ. Нет, не могло. **Решение.**
Пусть суммарное количество побед всех участников турнира равно n, тогда суммарное количество их поражений также равно n.
Предположим, что у каждого гроссмейстера такое же количество ничьих, как и побед, тогда суммарное количество ничьих в таблице чемпионата также равно n. При таком подсчете каждая партия учтена дважды, то есть сумма всех побед, ничьих и поражений в таблице результатов равна $20 \cdot 19$. Но уравнение $3n = 20 \cdot 19$ не имеет натуральных решений. Противоречие.

3. Пусть x, y – положительные числа такие, что
$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$. Докажите, что $x + y = 10$.
Решение.
Пусть $x + y = u, xy = v$. По формуле $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$. Тогда исходное уравнение примет вид $u^3 - 3uv + u^3 + 30v - 2000 = 0 \Leftrightarrow 2(u^3 - 1000) - 3v(u - 10) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (u - 10)(2u^2 + 20u + 200 - 3v) = 0 \Leftrightarrow u - 10 = 0$,поскольку
$2u^2 + 20u + 200 - 3v = 2x^2 + xy + 2y^2 + 20x + 20y + 200 > 0$ (так как по условию x, y положительные числа).

4. Можно ли подобрать три нечетных целых числа x, y и z так, чтобы оказалось верным равенство $(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$?
Ответ. Нет, нельзя. **Решение**.
Раскроем скобки в обеих частях данного равенства
$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 = y^2 + 2yz + z^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + xy + xz = yz \Leftrightarrow x^2 + xy + xz + yz = 2yz \Leftrightarrow (x+y)(x+z) = 2yz.$
Если x, y и z — нечетные числа, то выражение, полученное в левой части, делится на 4, а выражение, полученное в правой части — не делится на 4. Полученное противоречие показывает, что никакая тройка нечетных целых чисел не является решением исходного уравнения.

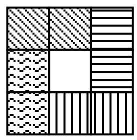
5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD окружность, проходящая через середины диагоналей и точку их пересечения, касается прямых BC и AD. Чему может быть равен угол между диагоналями?
Ответ. 90 градусов. **Решение.**

Поскольку окружность касается оснований трапеции, то ее центр лежит на средней линии трапеции. Также на средней линии лежат середины диагоналей. Следовательно, отрезок, соединяющий середины диагоналей является диаметром этой окружности.
Угол между диагоналями $\angle MKN$ опирается на диаметр, и поэтому равен 90°.



6. В центральной клетке таблицы 3×3 стоит 0. Двое по очереди записывают в пустые клетки этой таблицы числа от 1 до 8 (каждое число можно использовать только один раз). Первый выигрывает, если после того, как в таблицу будут поставлены все числа, сумма чисел в какой-то строке, столбце или на какой-то из диагоналей делится на 9. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй. **Решение.**



Соединим клетки периметра таблицы в четыре "доминошки" так, как показано на рис. Пусть второй в ответ на каждый ход первого каким-то числом n в некоторую клетку периметра ставит число $9-n$ во вторую клетку той же "доминошки". Тогда после окончания игры сумма чисел в каждой "доминошке" будет равна 9. Это значит, что в любой строке и любом столбце периметра сумма чисел будет равна $9+n$, где $0 \le n \le 8$, то есть не будет делиться на 9. В центральных же строке, столбце и на каждой из двух диагоналей сумма будет равна сумме двух крайних чисел, не равной 9, ибо любая пара чисел, дающих в сумме 9, стоит в одной "доминошке".