Образовательный центр «Сириус»
Южная математическая смена
Основной тур. 8.11.2015
11 класс

1. Из Бухты в Барахты выехал мопед. Одновременно из Барахты в Бухты навстречу мопеду вышел пешеход. После их встречи мопед повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что мопед вернулся в Бухты на пол часа раньше пешехода, при этом его скорость была в 5 раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из Барахты в Бухты?

Ответ. 45 минут. **Решение.**

До встречи пешеход прошел расстояние, в 5 раз меньшее, чем проехал мопед, то есть $\frac{1}{6}$ всего пути. К моменту возвращения мопеда в Бухту пешеход прошел еще столько же, то есть ему осталось еще $\frac{2}{3}$ пути. На это он потратил 30 минут. Следовательно, на все расстояние ему потребовалось в полтора раза больше времени, то есть 45 минут.

2. Докажите неравенство для любых действительных чисел $a,\ b$: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Решение.

$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0.$

3. Юра и Сеня задумали по одному двузначному числу. Юра заметил, что его число в 2 раза больше, чем у Сени. А Сеня заметил, что в его числе одна цифра равна сумме цифр числа, задуманного Юрой, а другая цифра равна разности цифр в числе Юры. Какое число задумано Сеней? Найдите все варианты ответа и объясните, почему нет других.

Ответ. 17. **Решение.**

Пусть у Юры записано число с первой цифрой A и второй цифрой B (а само число тогда равно $10A + B$). В числе Сени одна из цифр равна $A + B$, причём это не первая цифра (иначе число Юры, как легко убедиться, не будет в 2 раза больше, чем у Сени).

Таким образом, у Сени вторая цифра равна $A + B$, а первая равна $A - B$ или $B - A$. Разберём оба этих варианта.

1 случай. Пусть у Сени вторая цифра равна $A + B$, а первая равна $A - B$. Тогда это число равно $10(A - B) + (A + B)$. Если его умножить на 2, то получится число Юры. Итак, получаем уравнение: $2(10(A - B) + (A + B)) = 10A + B$.

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые: $12A = 19B$.

Теперь заметим, что правая часть уравнения делится на 19, а левая – не делится ни при каком A от 0 до 9. Значит, этот случай невозможен.

2 случай. Пусть у Сени вторая цифра равна $A + B$, а первая равна $B - A$. Тогда это число равно $10(B - A) + (A + B)$. Из того, что число Юры в 2 раза больше, получаем уравнение:
$2(10(B - A) + (A + B)) = 10A + B$.

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые: $3B = 4A$.

Правая часть равенства делится на 4, поэтому и левая часть должна делиться на 4. А для этого цифра B должна быть равна 0, 4 или 8. При этом $B \neq 0$ (иначе при $B = 0$ из уравнения получим, что $A = 0$, тогда это не может быть первой цифрой двузначного числа Юры). Также $B \neq 8$, потому что при $B = 8$ получаем, что $A = 12$, то есть это не цифра. Остаётся случай $B = 4$, тогда $A = 3$, а у Юры записано число 34. Но тогда у Сени записано число в 2 раза меньше, то есть 17.

4. Придумайте такой квадратный трёхчлен $y = f(x)$, чтобы равенство $f(x) = f(y)$ при $x \neq y$ достигалось только в одной точке графика $y = f(x)$.

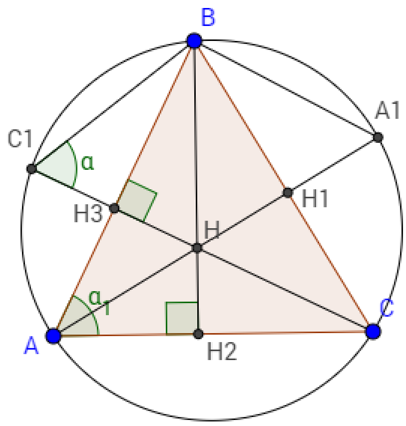
Ответ. $f(x) = x^2$. **Решение.**

Действительно, равенство имеет вид $\mathrm{f(x) = f(f(x))}$. Подставляя функцию $\mathrm{x^2}$, получим $\mathrm{x^2 = x^4}$. Его решениями являются $0, 1, -1$. Рассмотрев точки $\left(0, \mathrm{f}(0)\right)$, $\left(1, \mathrm{f}(1)\right)$, $(-1, \mathrm{f}(-1))$ графика $\mathrm{f(x)}$ проверкой убеждаемся что равенство $\mathrm{f(x) = f(y)}$ достигается только в одной точке, а именно $(-1, \mathrm{f}(-1))$, т.к. $\mathrm{f}(-1) = \mathrm{f}(1)$.

Комментарий. Возможны и другие примеры.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты из вершин A и C вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1 и C_1. Докажите, что эти точки равноудалены от вершины B.

Решение.



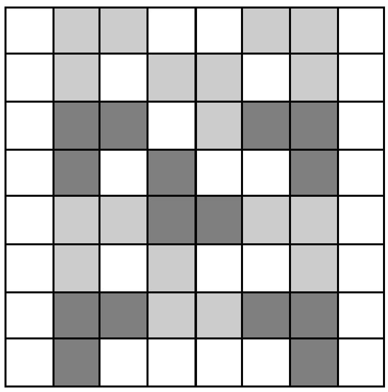
Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BC_1C = \angle BAC = \alpha$, как опирающиеся на дугу BC. Кроме того, треугольники ABH_2 и BHH_3 подобны по двум углам, поэтому $\angle BHH_3 = \angle BAC = \alpha$.

Имеем, $\angle BHH_3 = \angle BC_1C$, значит $BC_1 = BH$.

Аналогично доказывается, что $BA_1 = BH$.

6. Какое наименьшее количество уголков из трех клеток можно закрасить синей краской на белой доске 8×8 так, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать ни одного белого уголка из трех клеток?

Ответ. 11. **Решение.**



Если закрасить 11 уголков так, как показано на рисунке справа, то легко убедиться в том, что из оставшейся части доски ни одного уголка вырезать уже нельзя.

Теперь докажем, что должно быть закрашено хотя бы 11 уголков. Доску 8×8 можно представить как объединение 16 квадратов размером 2×2. Заметим, что в каждом таком квадрате 2×2 необходимо закрасить хотя бы две клетки (иначе из этого квадрата удастся вырезать уголок). Но тогда общее количество закрашенных клеток должно быть как минимум $16 \cdot 2 = 32$, а для этого потребуется хотя бы 11 уголков (по 3 клетки на уголок).