Образовательный центр «Сириус»
Южная математическая смена
Основной тур. 8.11.2015
9 класс

1. Представьте число 2015 в виде суммы четырёх натуральных слагаемых так, чтобы все цифры в записи этих слагаемых были различны.

   Решение.

   $2015 = 1980 + 23 + 5 + 7.$

2. Про числа a и b известно, что $5(a-1) = b + a^2$. Выясните, какое из этих чисел больше.

   Ответ. $a > b$. **Решение.**

   Перепишем условие задачи в виде: $b = -a^2 + 5a - 5$. Выясним знак разности $a - b$. Получим: $a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a-2)^2 + 1 > 0$. Следовательно, $a > b$.

   Если в системе координат $(a,\ b)$ построить графики функций $b = -a^2 + 5a - 5$ и $b = a$, то первый график располагается ниже, чем второй. Исходя из расположения графиков, можно получить ответ, но строгим доказательством это не является.

3. Самая точная в мире бабушка ждала в гости 11 внуков, поэтому испекла 11 пирожков по 100 граммов и 11 пирожков по 80 граммов. Но в гости к ней пришли только 9 внуков. Тем не менее, бабушка хочет раздать пирожки так, чтобы всем пришедшим внукам досталось поровну пирожков (по массе). Конечно, для этого какие-то пирожки придется разрезать. Каким наименьшим количеством разрезов ей удастся обойтись, если ни один из пирожков нельзя резать больше чем на две части? Обоснуйте свой ответ.

   Решение.

   Общая масса пирожков, испечённых бабушкой, равна 1980 граммов, то есть каждый внук должен получить 220 граммов. Но легко убедиться, что 220 нельзя набрать целым количеством испечённых пирожков (два самых тяжёлых пирожка весят всего лишь 200 граммов, а три самых лёгких пирожка весят уже 240 граммов). Поэтому каждый внук должен получить хотя бы один нецелый пирожок (кусок).

   Но тогда всего 9 внуков должны получить как минимум 9 нецелых пирожков (кусков), а для этого придется разрезать не менее 5 пирожков (если разрезать 4 или меньше пирожков, то получится не более 8 кусков).

   Поможем бабушке обойтись 5 разрезами. Разрежем 4 пирожка по 100 граммов на части по 60 и 40 граммов, а один 80-граммовый пирожок разрежем пополам (на 2 куска по 40 граммов). Теперь у нас есть 7 пирожков по 100 граммов, 10 пирожков по 80 граммов, 4 куска по 60 граммов и 6 кусков по 40 граммов. Шесть внуков получают пирожки и куски так: 100 + 80 + 40. Двоим внукам выдадим такие пирожки и куски: 80 + 80 + 60. А ещё один внук получает такие пирожки и куски: 100 + 60 + 60.

4. В сказочной стране живут гномы, всегда говорящие правду, тролли, которые всегда врут, и хамелеоны, которые иногда говорят правду, а иногда врут. Путешественник спросил у четверых местных жителей: «Который час?».

Трое ответили: «Полдень», а один: «Половина первого». Через некоторое время на такой же вопрос двое ответили: «Четыре часа дня», а двое: «Половина четвертого». Известно, что среди четверых опрошенных был гном. Докажите, что среди них был и хамелеон.

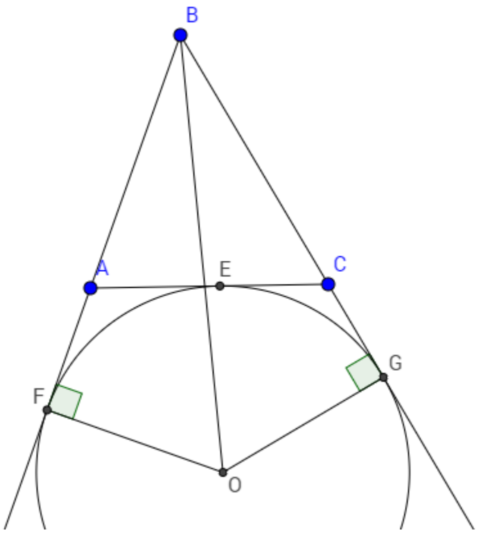
Решение.

Допустим, среди опрошенных были только гномы и тролли. Пусть в первый раз гном ответил: «Час дня». Тогда ещё двое, ответившие так же, — тоже гномы, и на второй вопрос все трое тоже должны были ответить одинаково, что противоречит условию. Поэтому эти трое — тролли. Стало быть, гном — один. Но тогда получается, что один из троллей ответил на второй вопрос так же, как и гном, то есть сказал правду. Противоречие.

5. У треугольника радиус окружности, касающейся одной стороны и продолжений двух других сторон, оказался равным полупериметру этого треугольника. Докажите, что треугольник прямоугольный.

Решение.

Окружность, касающаяся одной стороны и продолжения двух других, является вневписанной окружностью данного треугольника. Пусть p — полупериметр данного треугольника. Общеизвестным является факт, что отрезок касательной из вершины B к вневписанной окружности равен полупериметру этого треугольника. Следовательно, $BF = p$. Кроме того, радиус OF к BA перпендикулярен BA и равен p. Получаем, что прямоугольный ΔBOF является равнобедренным. Следовательно, $\angle OBF = 45°$. Аналогично получаем $\angle OBG = 45°$. Откуда $\angle ABC = 45° + 45° = 90°$.



6. Тимур написал на доске несколько различных натуральных чисел. Коля поделил сумму этих чисел на их произведение. После этого Тимур стер самое маленькое число, а Коля вновь поделил сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат Коли оказался в 3 раза больше первого. Какое число стер Тимур?

Ответ. 4. **Решение.**

Пусть a – стертое число, S – сумма оставшихся, P – произведение оставшихся. Тогда $3 \cdot \frac{a+S}{aP} = \frac{S}{P} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{S}$.

Так как $a < S$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$, то есть $a = 4$ или $a = 5$. Случай $a = 5$ невозможен, так как при этом $S = 7{,}5$. Случай $a = 4$ возможен: $S = 12$, и написанными Тимуром числами могли быть 4, 5 и 7.